(1) Μιγαδικές Συναρτήσεις — Δευτέρα, 23/05/2016

$f: B_0(a,R) \to \mathbb{C}$ ΟΛΟΜΟΡΦΗ.

a πόλος: $\lim_a f = \infty$: $f(z) = (z-a)^{-k} g(z)$

αν $\nexists$ το $\lim$ λέμε ότι το σημείο είναι ουσιωδώς ανώμαλο.

LAURENT: $$f(z) = \underbrace{\dots \frac{b_{-\nu}}{(z-a)^{\nu}} + \frac{b_{-\nu+1}}{(z-a)^{\nu-1}} + \dots + \frac{b_{-1}}{z-a}}_{La(z)} + \underbrace{b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \dots}_{Ha(z)}$$

$$= (z-a)^{-k} g(z) \quad ⊛$$

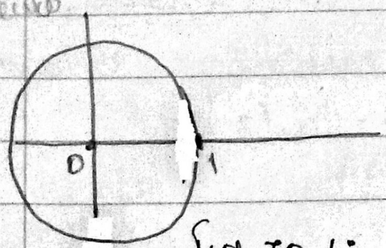
για το κατασκευάω

Πχ: $f(z) = \frac{e^z}{z-1} = (z-1)^{-1} e^z$

$z=1$ πόλος α τάξης

1) $B(0,1)$: z, $|z|<1$

2) $\Delta(0,1,+\infty)$: $|z|>1$



Για το 1:

$$\frac{e^z}{z-1} = e^z \cdot \frac{1}{z-1} = -e^z \cdot \frac{1}{1-z} = \text{τα αναπτύσσω σε σειρά Taylor}$$

$$= -\sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{z^\nu}{\nu!} \sum_{k=0}^{+\infty} z^k = -\sum_{\nu=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\nu!} z^{\overset{\text{“}\lambda\text{”}}{\nu+k}} = (\lambda = \nu + k,\ \lambda = 0 \xrightarrow{\text{έως}} \lambda = +\infty)$$

$$\nu = \lambda - k \overset{\lambda = \text{σταθ.}}{\Rightarrow} \nu \geq 0 \Rightarrow k \leq \lambda$$

$$= -\sum_{\lambda=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{\lambda} \frac{1}{(\lambda-k)!}\right) z^\lambda = \sum_{\lambda=0}^{+\infty} \underbrace{\left(-1-1-\frac{1}{2!} - \dots - \frac{1}{\lambda!}\right)}_{b_\lambda} z^\lambda$$

Για το 2:

$$\frac{e^z}{z-1} = e^z \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} = \frac{1}{z} e^z \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{\nu=0}^{+\infty}\frac{z^\nu}{\nu!}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{z^k} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\nu!} z^{\nu-k-1=\lambda} \qquad \lambda = \nu - k - 1 \geq 0$$

$$= \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{\lambda}\frac{1}{(\lambda-k)!}\right) z^\lambda.$$

⊛ Πολ/ζω με $(z-a)^k$. Όταν α ουσιωδώς ανώμαλο

$$= \dots \frac{b_{-\nu}}{(z-a)^{\nu-k}} + \frac{b_{-\nu+1}}{(z-a)^{\nu-k-1}} + \dots + b_1(z-a)^k + b_1(z-a)^{k+1} + \dots + \dots = g(z)$$

Όταν το α είναι πόλος:

Η συν/ση $f(z) = \frac{b_{-k}}{(z-a)^k} + \frac{b_{-k+1}}{(z-a)^{k-1}} + \dots + \frac{b_{-1}}{z-a} + b_0 + b_1(z-a) + \dots$

(2)

Πχ: $f(z) = \eta\mu\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \dots = \dots \frac{1}{5!z^5} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{z}$

0 - ουσ. ανωμ. σημείο

Άρα, το $\eta\mu\left(\frac{1}{z}\right)$ όταν $z \to 0$ $\nexists$ το lim.

πολοι

f:  $\tau \to \mathbb{C}$

γύρω από το a_1: $f(z) = K_{a_1}(z) + H_{a_1}(z)$

$\Rightarrow \underbrace{f(z) - K_{a_1}(z)} = H_{a_1}(z)$

αν επεκταθεί πατάει στο a_2

$\rightarrow f(z) - K_{a_1}(z) = H_{a_1}(z) = K_{a_2}(z) + H_{a_2}(z)$

Αφαιρώ τα κομμάτια που δημιουργούν ανωμαλίες:

$f(z) - K_{a_1}(z) - K_{a_2}(z) = H_{a_2}(z) = K_{a_3}(z) + H_{a_3}(z)$

$f(z) - K_{a_1}(z) - K_{a_2}(z) - \dots - K_{a_k}(z) = g(z)$

$g(z) = f(z) - \sum_{j=1}^{k} K_{a_j}(z)$

ΟΛΟΜΟΡΦΗ στου τ

$\int_\gamma g(z)dz = 0$

$\Rightarrow \boxed{\int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{k} \int_\gamma K_{a_j}(z)dz}$

SOS

$\int_\gamma K_{a_1}(z)dz = \int_\gamma \sum_{\nu=0}^{n_1} \frac{b_{-\nu}}{(z-a_1)^\nu} dz =$

$= \sum_{\nu=0}^{n_1} b_{-\nu} \int_\gamma \frac{dz}{(z-a_1)^\nu} = b_{-1} \int_\gamma \frac{dz}{z-a} =$

$= 2\pi i b_{-1} \underbrace{\left[\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-a}\right]}_{I} = 2\pi i b_{-1} I(\gamma, a_1)$

b_{-1} ↳ ολοκληρωτικό υπόλοιπο.

$b_{-1} = \operatorname{Res}_{a_1}(f)$

Επομένως, $\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}_{a_j}(f)\, I(\gamma, a_j)$: ΤΥΠΟΣ CAUCHY ΓΙΑ ΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΑ ΥΠΟΛΟΙΠΑ.

$f(z) = (z-a)^{-k} g(z) = \frac{b_{-k}}{(z-a)^k} + \frac{b_{-k+1}}{(z-a)^{k-1}} + \dots$ • όταν a: πόλος.

$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma \frac{b_{-1}}{z-a} dz$ = όλα τα προηγ. φεύγουν $=0$, γιατί Γ: κλειστή απλή κ' f: ολομορφή.

$= b_{-1} \int_\Gamma \frac{dz}{z-a_1} = 2\pi i b_{-1} \underbrace{I(\Gamma, a_1)}_{1}$

$\Rightarrow b_{-1} = \operatorname{Res}_{a_1}(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)dz$

$f(z) = (z-a)^{-k} g(z)$

$\boxed{\operatorname{Res}_a (f)} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g(z)}{(z-a)^k} dz =$

$= \frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{(k-1)!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g(z)}{(z-a)^k} dz = \frac{1}{(k-1)!} g^{(k-1)}(a) =$

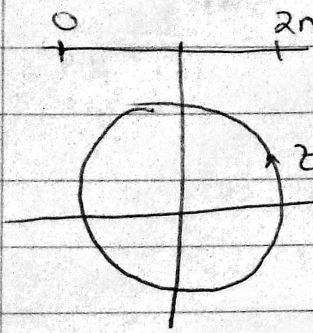
$= \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to a} [g^{k-1}(z)] = \boxed{\frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to a} [(z-a)^k f(z)]^{(k-1)}} \quad [g(z)]^{(k-1)}$

<u>ΕΦΑΡΜΟΓΗ:</u> (Residuum)

$1 = \operatorname{Res}_0 (\eta\mu \frac{1}{z}) \quad \eta\mu(\frac{1}{z}) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - + \dots = \dots \frac{1}{5!z^5} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{z}$

$\operatorname{Res}_0 (\sigma\upsilon\nu \frac{1}{z}) = 0.$

$\int_0^{2\pi} R(\eta\mu t, \sigma\upsilon\nu t)dt \quad (*)$



$z = e^{it} = \sigma\upsilon\nu t + i\eta\mu t$

$\bar{z} = e^{-it} = \sigma\upsilon\nu t - i\eta\mu t = \frac{1}{e^{it}} = \frac{1}{z}$

$\begin{cases} (+) & \sigma\upsilon\nu t = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} \\ (-) & \eta\mu t = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i} \end{cases}$

Αν τη διαφορίσω:

$dz = ie^{it}dt = iz\,dt \Rightarrow dt = \frac{dz}{iz} = -i\frac{dz}{z}$ συνεχής ς αντικαθιστώ στην (*)

$(*) = -i \int_\gamma R\left(\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}, \frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right) \frac{dz}{z}$

$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+b\eta\mu t} = \int_\gamma \frac{-i\frac{dz}{z}}{a+b\cdot\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}} = 2\int_\gamma \frac{dz}{z(2ia+b(z-\frac{1}{z}))} =$

$= 2\int_\gamma \frac{dz}{2iaz+bz^2-b} = 2\int \frac{dz}{bz^2+2iaz-b}$

$bz^2+2iaz-b=0 \qquad |a|>|b| \to a^2>b^2 \Rightarrow -a^2+b^2<0$

$z_{1,2} = \frac{-ia \pm \sqrt{-a^2+b^2}}{b}$

$= i\,\frac{-a \pm \sqrt{a^2-b^2}}{b^2}, \quad \left|\frac{-a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right| > 1 \Rightarrow |a+\sqrt{a^2-b^2}| > |b|$

$\Rightarrow a^2+2a\sqrt{a^2-b^2}+a^2-b^2 > b^2 = 2a\sqrt{a^2-b^2} > 2(b^2-a^2)$

Κάνω ανάλογη διαδικασία και για το + κ' βλέπω ότι είναι μέσα

$$2\pi i\left(\operatorname{Res}_0 \frac{2}{2iaz+ba^2-b}\right) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+b\eta\mu t}$$

Αρκεί να βρω το ολοκληρωτικό υπόλοιπο.

$$z_+ = \frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\cdot i$$

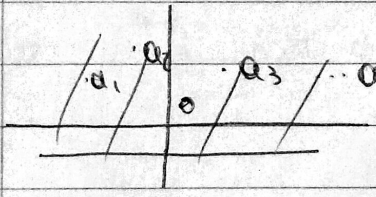
$$z_- = \frac{-a-\sqrt{a^2+b^2}}{b}\cdot i$$

$$\frac{2}{bz^2+2iaz-b} = \frac{2}{b(z-z_-)(z-z_+)}$$

$$\operatorname{Res}_{z_+}\left(\ \right) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_+}\left((z-z_+)^k \frac{2}{b(z-z_-)(z-z_+)}\right)^{(k-1)}\Bigg|_{k=1}$$

$$= \lim_{z_+} \frac{2}{b(z-z_-)} = \frac{2}{ib(z_+-z_-)} = \frac{2\cdot 2\pi i}{b\,i\,\frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{b}} = \frac{2\pi i}{i\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$\frac{2\pi i}{i\sqrt{a^2-b^2}} = \boxed{\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}}$$



$f: \ \cdots \to \mathbb{C}$ $\quad a_j \in \mathbb{C}^+,\ j=1,2,\dots$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = (PV) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{+r} f(x)\,dx.$$

Υποθέτουμε ότι έχουμε την εξής ιδιότητα: $\boxed{\lim_{\infty} z f(z) = 0}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}_{a_j}(f)$$

Πχ: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

παίρνουμε το $z = +i$ γιατί το θεωρ. μιλάει για το

$f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^2} \overset{x=z}{\Longrightarrow} f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^2}$, $z = \pm i$ (πόλοι) θετικό ημιεπίπεδο

Επομένως, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = 2\pi i \operatorname{Res}_i \frac{1}{(z^2+1)^2} = 2\pi i\, \frac{1}{1!} \lim_{z\to i}\left[(z-i)^2 \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}\right]'$

$\displaystyle = 2\pi i \lim_{z\to i}\left((-2)(z+i)^{-3}\right) = \frac{-4\pi i}{-8i} = \frac{\pi}{2}.$

Παράδειγμα 6.8.1 (σελ. 203)

Έστω γ θετικά προσανατολισμένος μοναδιαίος κύκλος και f μία μιγαδική συνάρτηση ορισμένη και ολόμορφη σε μια περιοχή της γ. Νδο το

$$\int_\gamma \frac{f''(z)}{z^3}\,dz = 12\int_\gamma \frac{f(z)}{z^5}\,dz$$

ΛΥΣΗ

$$g^{(n)}(\zeta) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(z)}{(z-\zeta)^{n+1}}\,dz, \quad \zeta \in \text{στο εσωτερ. της } \gamma$$

γ: απλή κλειστή, κατά τμήματα διαφορίσιμη, 0-ομοτοπική
f ολόμορφη σε μία περιοχή της γ
Από Θεώρημα Cauchy για την παράσταση των παραγώγων ολόμορφης συνάρτησης
$g = f''$ με $n=2$, $\zeta = 0 \in$ εσωτερ. της γ.
Άρα, $$f^{(4)}(0) = \frac{2!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f''(z)}{z^3}\,dz = \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{f''(z)}{z^3}\,dz \quad (1)$$

$g=f$ με $n=4$, $\zeta=0$
Άρα, $$f^{(4)}(0) = \frac{4!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z^5}\,dz \quad (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει ισότητα αυτών:

$$\frac{1}{\cancel{\pi i}}\int_\gamma \frac{f''(z)}{z^3}\,dz = \frac{12}{\cancel{\pi i}}\int_\gamma \frac{f(z)}{z^5}\,dz \Rightarrow$$

$$\int_\gamma \frac{f''(z)}{z^3}\,dz = 12\int_\gamma \frac{f(z)}{z^5}\,dz$$

Παράδειγμα 6.9.5. (σελ. 207)

Να βρεθεί το

$$\int_\gamma \frac{dz}{(2z^2+iz+1)^2}$$ με γ: θετ. προσαν. κύκλος κέντρου το 0 και ακτίνας $\frac{3}{4}$

ΛΥΣΗ

Ο παρονομαστής μηδενίζεται στα σημεία $-i, \frac{i}{2}$
το $-i$ ∈ στο εξωτερικό της γ και το $\frac{i}{2}$ ∈ στο εσωτερικό της γ.
Εφαρμόζω Θεωρ. Cauchy για παράσταση παραγώγων ολόμορφης συνάρτησης

$$\int_\gamma \frac{dz}{(2z^2+iz+1)^2} = \int_\gamma \frac{dz}{2^2(z+i)^2(z-\frac{i}{2})^2} = \int_\gamma \frac{\overbrace{1/4(z+i)^2}^{=g(z)}}{(z-\frac{i}{2})^{2}}dz \quad (1)$$

$n=1$

άρα από Θεωρ. Cauchy

$$\eta\ (1) = \frac{2\pi i}{1!}\, g'(\tfrac{i}{2}) = 2\pi i\left(\frac{-4i}{27}\right) = +\frac{8\pi}{27}$$

Παραδ. 6.10.4 (σελ. 210)

Νδο δεν υπάρχει μη σταθ. πολυωνυμική μιγαδική συνάρτηση P τ/ω $|e^z+P(z)| \le e^{Re z}, \forall z\in\mathbb{C}$

ΛΥΣΗ

Έστω ∃ μη σταθ. πολ. συναρτ. P τω

$|e^z+P(z)| \le e^{Re z}, \forall z\in\mathbb{C} \quad (*)$

$|e^z| = e^{Re z}$

$(*) \Rightarrow |e^z+P(z)| \le |e^z| \Rightarrow \left|\frac{e^z+P(z)}{e^z}\right| \le 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow |1+e^{-z}\cdot P(z)| \le 1 \quad (1)$

$h(z) = 1+e^{-z}P(z)$

$$\left.\begin{array}{l} h \text{ ακεραία} \\ |h(z)| \le 1 \Rightarrow h \text{ φραγμ.} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{Θ. Liouville}} h \text{ σταθ.} \Rightarrow h(z)=c,\ z\in\mathbb{C}$$

$1+e^{-z}P(z)=c \Rightarrow P(z)=e^z(c-1)$

Αν $c=1 \Rightarrow P(z)=0$ ↯ αφού P μη-σταθ

Άρα $c\neq 1 \Rightarrow$ P μη μηδενικό πολ/σιο της e^z

Αν ο βαθμός του P είναι $k \Rightarrow P^{(k+1)}(z)=0$ (2)

$P(z)=(c-1)e^z = P'(z)=P''(z)=\ldots=P^{(k+1)}(z) \overset{(2)}{=} 0$ ↯

Παραδ. 6.11.1 (σελ 214)

Ποια η τάξη της ρίζας $z=0$ της $f(z)=\dfrac{z^4}{z-\sin z}$;

ΛΥΣΗ

$$f(z)=\frac{z^4}{z-\sin z}.$$

$$z-\sin z = z-\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\cdot\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)=$$

$$=\frac{z^5}{3!}-\frac{z^5}{5!}+\ldots = z^3\left(\frac{1}{3!}-\frac{z^2}{5!}+\frac{z^4}{7!}-\ldots-(-1)^n\frac{z^{2n-2}}{(2n+1)!}+\ldots\right)$$

$$\Rightarrow f(z)=\frac{z^4}{z^3\left(\frac{1}{3!}-\frac{z^2}{5!}+\ldots\right)}=z\cdot h(z)$$

όπου $$h(z):=\frac{1}{\left(\frac{1}{3!}-\frac{z^2}{5!}+\ldots-(-1)^n\cdot\frac{z^{2n-2}}{(2n+1)!}+\ldots\right)}$$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ ολόμορφη σε μια περιοχή του } 0 \\ h(0)=\dfrac{1}{\frac{1}{3!}}=3!=6\neq 0 \end{array}\right\} z=0 \text{ ρίζα } 1^{\text{ης}} \text{ τάξης}$$

Παραδ. 6.11.3 (σελ. 215)

Να βρεθούν οι ρίζες της $f(z)=z^2\sin z$ και να προσδιοριστεί η πολλ/τα τους

ΛΥΣΗ

ρίζες : $z=0$, $z=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}^* \Rightarrow z=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$f'(z)=2z\sin z+z^2\cos z$

$f'(k\pi)=(2\pi)^2\cdot\cos k\pi \begin{cases} \overset{k=0}{} 0 \\ \underset{k\neq 0}{}\neq 0\end{cases}$

Άρα, οι ρίζες $z=k\pi$ όπου $k\neq 0$ είναι $1^{\text{ης}}$ τάξης

Τέλος, $f''(0)=0$, $f'''(0)=6\neq 0$ $3^{\text{ης}}$ τάξης η $z=0$

Παράδειγμα 6.11.4 (σελ. 216)

Ν.δ.ο. $\nexists$ ακεραία μη μηδενική συνάρτηση μιγαδική με ρίζες τουλάχιστον τα σημεία $\alpha_n := \frac{i}{n}$, $n=1,2,\dots$

ΛΥΣΗ

Έστω $\exists$ ακεραία μη μηδενική μιγαδική συνάρτηση που έχει ρίζες τα σημεία $\alpha_n = \frac{i}{n}$, $n=1,2,\dots$

Τότε $f(\alpha_n)=0$

Θέτω λοιπόν $g(z)=0$, $\forall z\in\mathbb{C}$ $\Big\}$ $f(\alpha_n)=g(\alpha_n)$

Επίσης, α_n φραγμένη με όρους διαφορετικούς ανά 2 και f και g ολόμορφες (αφού f ακεραία, g σταθ.)

Τότε, από την αρχή ταυτότητας ολόμορφων συναρτήσεων θα έχουμε ότι $f(z)=\underset{0}{\underset{\shortparallel}{g}}(z)$, $\forall z\in\mathbb{C}$ (Σ)

Παραδ. 6.11.5 (σελ. 217)

Έστω φ πραγματική συνάρτηση, πραγματικής μεταβλ. τ/ω $\varphi(2)=2$ και $\varphi(e^{-n})=1$, $\forall n=1,2,\dots$

ΝΔΟ $\nexists$ $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ολόμορφη τ/ω

$f(x)=\varphi(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ (*)

ΛΥΣΗ

Έστω $\exists$ $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση τ/ω $f(x)=\varphi(x)$

$e^{-n}\in\mathbb{R}$: (*) $\to f(e^{-n})=\varphi(e^{-n})=1$

Έστω $g(z)=1$, $\forall z\in\mathbb{C}$ $\to$ $f(e^{-n})=g(e^{-n})=1$

f,g ολόμορφες και e^{-n} φραγμένη και με όρους διαφορετικούς ανά 2 τότε από αρχή ταυτότητας ολόμορφων συναρτήσεων έπεται

$f(z)=g(z)=1$, $\forall z\in\mathbb{C}$

Αλλά, για $x=2$ από την (*) $\to$ $f(2)=\varphi(2)=2$

αλλά $f(2)=1$ από παραπάνω άρα άτοπο